

УДК 539.3

**А.В. Панов, Л.А. Назаров**

## **МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И СВОЙСТВ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ**

*Разработан метод количественной оценки горизонтальных компонент природного поля напряжений и деформационных характеристик конструктивных элементов технологий подземной разработки месторождений твердых полезных ископаемых. Метод базируется на решении обратных задач смешанного типа по данным об относительных смещениях дневной поверхности и точек контура выработанного пространства, которые могут быть зарегистрированы методами спутниковой и подземной геодезии в процессе ведения горных работ. Численные эксперименты, выполненные для типичной конфигурации выработанного пространства при камерно-столбовой системе разработки соляных месторождений неглубокого заложения, показали, что при уровне шума во входных данных до 15% коэффициент бокового отпора и упругие свойства слагающих целик пород могут быть определены с приемлемой точностью, если приращения смещений на дневной поверхности зарегистрированы не менее чем в 150, а в выработках — не менее чем в 10 точках.*

*Ключевые слова: природное поле напряжений, горные работы, Верхнекамское месторождение.*

---

**Г**еодинамическое районирование территорий для обеспечения безопасности объектов недропользования [1], геомеханическое обоснование технологий разработки месторождений твердых полезных ископаемых [2], выбор оптимального режима бурения и расчет траектории глубоких скважин [3] — вот далеко не полный перечень проблем, при решении которых необходима информация об ориентации и величине главных компонент природного поля напряжений.

Вертикальная составляющая поля, как правило, считается гравитационным напряжением  $\sigma_V(z) = \rho g z$  ( $\rho$  — средняя плотность пород,  $g$  — ускорение свободного падения,  $z$  — глубина). Для крупномасштабных геологических объектов (плиты и микроплиты) горизонтальные компоненты природного поля напряжений определяются косвенными методами [4], а для

среднемасштабных (пространство месторождения) — прямыми измерениями [2, 4, 5]. В этом случае в поле напряжений вносится возмущение и по отклику массива оцениваются искомые компоненты.

При разработке месторождений часто возникают вопросы определения свойств оставленных целиков для прогноза их устойчивости. Решение таких вопросов традиционными способами осложняются наличием в целиках систем трещин и неоднородностей. Изменение конфигурации подземного пространства при отработке месторождения вызывает вариацию полей смещений и деформаций не только в окрестности участка ведения горных работ, но и во всем породном массиве вплоть до дневной поверхности, на которой они могут быть зарегистрированы методами спутниковой геодезии (радарная интерферометрия, GPS).

В настоящее время такая информация используется для:

- оценки проницаемости нефтяных [6] и газовых [7] резервуаров, порового давления в них [8];
- верификации геомеханических моделей объектов (наземных или мелкого заложения) на основе решения серии прямых задач [9];
- мониторинга состояния земной поверхности при добыче нефти и газа [10], угля [11], руды [12], эксплуатации карьеров [13] и др.

В данных космической геодезии содержится гораздо больше информации о геодинамических (например, подготовка сейсмических событий) и геомеханических процессах в верхней части земной коры, чем можно получить при традиционных методах интерпретации. Поэтому необходимы новые подходы, основанные на постановках и решении обратных задач [14].

В этой статье на основе решения смешанной обратной задачи для системы уравнений теории упругости предложен метод количественной оценки упругих характеристик (модулей Юнга, коэффициентов Пуассона) конструктивных элементов камерно-столбовой технологии отработки месторождений полезных ископаемых, а также горизонтальных напряжений по данным смещений дневной поверхности и/или контуров выработок.

### 1. Прямая задача: постановка, метод решения

Рассмотрим типичную конфигурацию подземного пространства, возникающую при реализации камерно-столбовой системы отработки (прообраз Верхнекамское калийное месторождение [15]). На рис. 1 показано вертикальное сечение исследуемого объекта. На Верхнекамском месторождении чередующиеся горизонтальные пласты сильвинита и карналлита мощностью до 10 м залегают, начиная с глубин около 100 м. Каждый горизонт последовательно вскрывается штреками  $W_1, W_2, W_3 \dots$  поперечные размеры которых много меньше их протяженности, поэтому в первом приближении можно считать, что исследуемый участок находится в плоском деформированном состоянии [5].

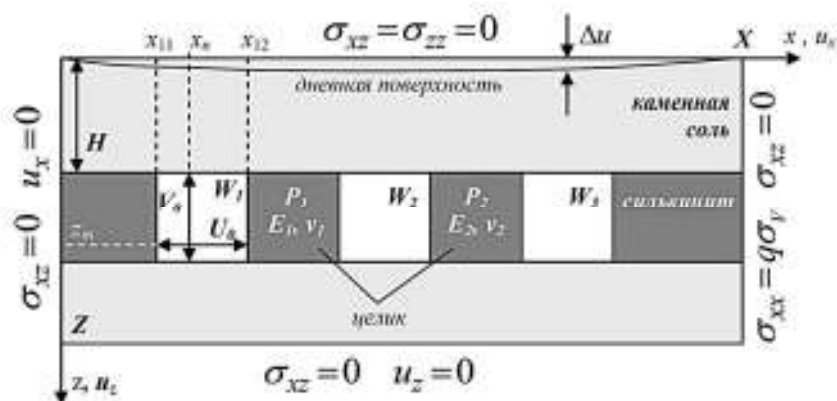


Рис. 1. Схема расчетной области и граничные условия

Геометрические значения параметров исследуемой модели (рис. 1): размеры расчетной области  $400 \times 200$  м; глубина залегания пласта  $H = 100$  м; размеры выработок  $W_1, W_2, W_3$  и целиков  $P_1, P_2 - 10 \times 10$  м; шаг дискретизации по пространству 2 м. Физические свойства (плотность  $\rho$ , модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ ) слагающих массив пород приведены в табл. 1 [16]. Следует обратить внимание на низкие деформационные характеристики соляных пород.

Таблица 1

«Базовые» физические свойства горных пород, участвующих в расчётах

Порода	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , ГПа	$\nu$
Каменная соль	2500	2	0.3
Сильвинит	2400	1.3	0.3

Деформирование среды описывается системой уравнений линейной теории упругости: уравнения равновесия (1), закон Гука (2) и соотношения Коши (3).

$$\sigma_{ij,j} + \rho g \delta_{iz} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций ( $i, j = x, z$ );  $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}$  — объёмная деформация,  $u_i$  — смещения;  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе;  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера.

На границе расчетной области сформулируем следующие условия (рис. 1):

$$u_x(0, z) = 0, \quad \sigma_{xz}(0, z) = 0; \quad (4)$$

$$\sigma_{xx}(X, z) = q\sigma_v(z), \quad \sigma_{xz}(X, z) = 0; \quad (5)$$

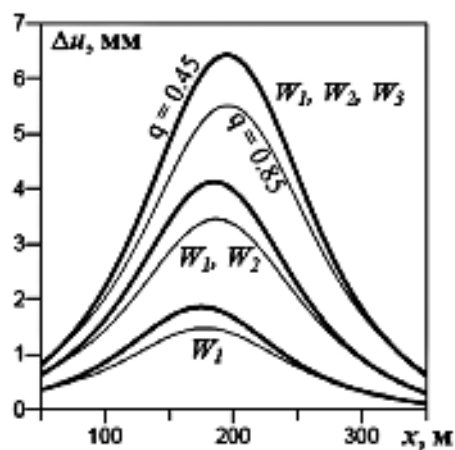
$$\sigma_{zz}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, 0) = 0; \quad (6)$$

$$u_z(x, Y) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, Y) = 0, \quad (7)$$

где  $q$  — коэффициент бокового отпора, характеризующий величину горизонтальных напряжений вне зоны ведения горных работ. Контуры выработок  $W_k$  свободны от напряжений.

Расчеты осуществлялись с использованием оригинального кода [17], реализующего 2D метод конечных элементов для структурно-неоднородных сред с нарушениями сплошности. Образование новых выработок моделировалось методом дополнительных напряжений [18].

Оценим приращения вертикальных смещений свободной поверхности  $\Delta u$ , вызванные последовательным образованием выработок  $W_k$  (рис. 1). На рис. 2 показано распределение  $\Delta u$  при различных коэффициентах бокового отпора  $q = 0.45 — 0.85$ . Отметим, что увеличение горизонтальных напряжений в при-



**Рис. 2.** Вызванные образованием выработок приращение вертикальных смещений на дневной поверхности при различных коэффициентах бокового отпора  $q$

родном поле ведет к уменьшению оседания дневной поверхности. Амплитуда  $\Delta u$  при образовании уже второй выработки  $W_2$  достигает 3—4 мм (в зависимости от величины коэффициента Пуассона). Современные системы космической геодезии (радарная интерферометрия, GPS) позволяют регистрировать сдвиги земной поверхности амплитудой не менее 2 мм [19, 20].

## 2. Постановка обратной задачи

Основными несущими элементами при камерно-столбовой системе разработки являются междуканальные целики  $P_k$  (рис. 1). Для оценки их устойчивости и времени жизни необходимо знать их геомеханические свойства. Вследствие природной и/или техногенной нарушенности пластов полезных ископаемых деформационные и прочностные характеристики целиков могут существенно отличаться от таковых слагающих их пород. Например, коэффициент структурного ослабления на некоторых участках Жезказганского месторождения медных руд достигает 0.3 [21].

Исследуем разрешимость модельной обратной задачи: определить коэффициент бокового отпора  $q$  и упругие характеристики (модули Юнга  $E_1$  и  $E_2$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$ ) двух соседних целиков  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1) по приращениям смещений, замеренным либо на дневной поверхности, либо на контурах камер  $W_1$  и  $W_2$ .

В процессе ведения горных работ в выработках  $W_1$  и  $W_2$  будем регистрировать изменение размеров камер: горизонтальное  $U_0(z_m)$  и вертикальное  $V_0(x_n)$ , где  $x_n$  и  $z_m$  — координаты местоположения регистрирующих устройств (рис. 1).

После создания камеры  $W_3$  снимем показания этих устройств, а также измерим вертикальные смещения  $\Delta u(x_n)$  дневной поверхности. Эти данные будут входными для решения обратной задачи.

Введем целевые функции  $\Psi$  и  $\Omega$ :

$$\Psi(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2) = \sum_n [\Delta u_y(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2, x_n) - \Delta u(x_n)]^2, \quad (15)$$

$$\Omega(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2) = \alpha \Omega_x(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2) + (1 - \alpha) \Omega_y(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2), \quad (16)$$

где

$$\Omega_x(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2) = \sum_m [U(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2, z_m) - U_0(z_m)]^2,$$

$$\Omega_y(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2) = \sum_n [V(q, E_1, \nu_1, E_2, \nu_2, x_n) - V_0(x_n)]^2.$$

$\alpha$  — эмпирическая константа ( $0 \leq \alpha \leq 1$ );  $U$  и  $V$  относительные смещения противоположных стенок первой и второй камер (рис. 1), вычисленные по (1) — (7) при некоторых значениях коэффициента бокового отпора и упругих свойствах целиков.

Мы исследуем структуру целевых функций с использованием синтетических входных данных. Поэтому  $U_0(z_m)$  — относительные горизонтальные ( $V_0(x_n)$  — вертикальные) смещения в первой и второй выработках (которые возникли при образовании третьей выработки), вычисленные по (1) — (7) при значениях параметров  $q^s, E_1^s, \nu_1^s, E_2^s, \nu_2^s$ . Эти параметры (с индексом «s») мы будем искать при решении обратной задачи.

Для большей реалистичности наложим на наши входные данные помехи с амплитудой  $\eta$ . Такие помехи можно рассматривать как неточность замеренных смещений или погрешность приборов измерения. Например,

$$U_0(z_m) = (1 + \gamma)[u_x(q^s, E_1^s, \nu_1^s, E_2^s, \nu_2^s, x_{11}, z_m) - u_x(q^s, E_1^s, \nu_1^s, E_2^s, \nu_2^s, x_{12}, z_m)] + (1 + \gamma)[u_x(q^s, E_1^s, \nu_1^s, E_2^s, \nu_2^s, x_{21}, z_m) - u_x(q^s, E_1^s, \nu_1^s, E_2^s, \nu_2^s, x_{22}, z_m)] \quad (17)$$

где  $x_{11}$  и  $x_{12}$  — абсциссы левой и правой границ первой камеры (рис. 1),  $x_{21}$  и  $x_{22}$  — второй;  $\gamma$  — равномерно распределенная на отрезке  $[-\eta, \eta]$  случайная величина.

Сформулированная краевая задача (1) — (7) — смешанного типа [5], поэтому алгоритм ее решения методом конечных элементов дает возможность оптимизировать поиск минимума целевых функций при использовании градиентных методов. При их реализации на каждом итерационном шаге необходимо численно находить частные производные по каждому аргументу целевой функции.

Анализ разрешимости обратной задачи и структуры соответствующих целевых функций проводился по следующей схеме:

- задавался реалистичный диапазон изменения каждого из искоемых параметров (например,  $0.1 \leq v_1 \leq 0.45$ ) и рассчитывались значения целевой функции (15—20 шагов по каждому аргументу) при различном уровне шума  $\eta$ ;

- для графического представления фиксировались три аргумента и отрисовывались изолинии сечения целевых функций  $\Psi$  и  $\Omega$  — выявлялись локальные минимумы и области эквивалентности, а также подходящие начальные приближения (показаны на рисунках темными квадратами);

- запускалась программа поиска минимума (метод сопряженных градиентов [22]) и фиксировалась траектория итерационного процесса, проекция которой затем наносилась на соответствующую карту изолиний (штриховые линии).

Результаты анализа иллюстрируются далее наиболее характерными картами изолиний.

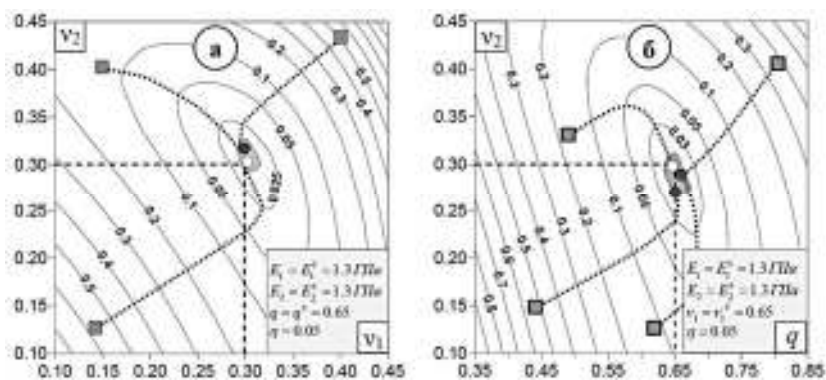
### **2.1. Входные данные на контуре выработок**

На рис. 3а показаны изолинии целевой функции  $\Omega$  на плоскости  $(v_1, v_2)$  и  $(q, v_2)$  на рис. 3б с уровнем шума  $\eta = 5\%$ . На рис. 4а показаны изолинии сечения целевой функции  $\Omega$  на плоскости  $(E_1, E_2)$  с  $\eta = 10\%$ ; на рис. 4б — на плоскости  $(E_2, v_2)$ ,  $\eta = 15\%$ . Отметим, что при заданных условиях сформулированная обратная задача разрешима — исследуемая область содержит одну единственную область минимума целевой функции. Начальные приближение для модулей Юнга и коэффициентов Пуассона можно задать любые (по крайней мере из

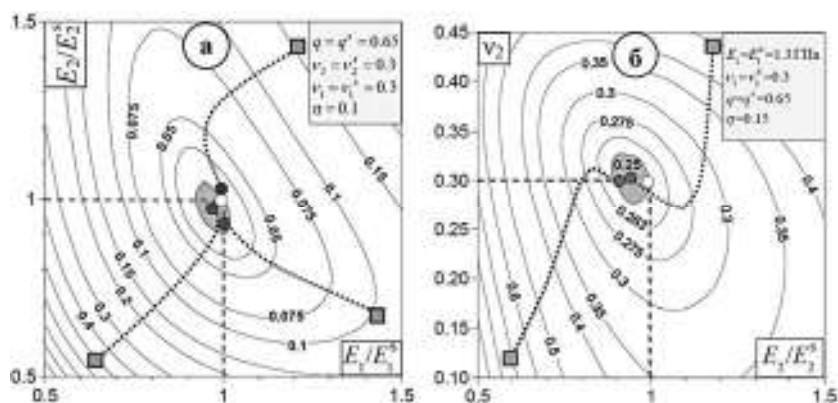
диапазона  $0.1 \leq \nu \leq 0.45$ ,  $0.5 \leq E_1 / E_1^S \leq 1.5$ ) и получить решение с точностью  $< 10\%$ . Заметим, что точность решения зависит от уровня шума  $\eta$ .

Численные эксперименты показали, что при  $\alpha = 0.5$ :

- область эквивалентности (выделена темным тоном) содержит точное решение (светлые кружки);
- при уровне шума  $\eta < 0.15$  необходимо не менее 10 пунктов измерений в каждой выработке чтобы достичь приемлемой точности определения упругих характеристик целиков и коэффициента бокового отпора.



**Рис. 3.** Изолинии сечения целевой функции  $\Omega$  на плоскостях  $(\nu_1, \nu_2)$  и  $(q, \nu_2)$



**Рис. 4.** Изолинии сечения целевой функции  $\Omega$  на плоскостях  $(E_1, E_2)$  с ошибкой 10% и  $(E_2, \nu_2)$  с ошибкой 15%



## 2.2. Входные данные на дневной поверхности

На рис. 5а и 5б на плоскостях  $(q, v_2)$  и  $(E_2, q)$  представлены карты изолиний функции  $\Psi$ , которые имеют ярко выраженную овражную структуру. Поэтому искомое значение параметра  $q$  определяется практически независимо от остальных аргументов функции  $\Psi$ , необходимо лишь задать реалистичные границы их изменения. Тогда при решении обратной задачи количество аргументов целевой функции уменьшится с пяти до четырех.

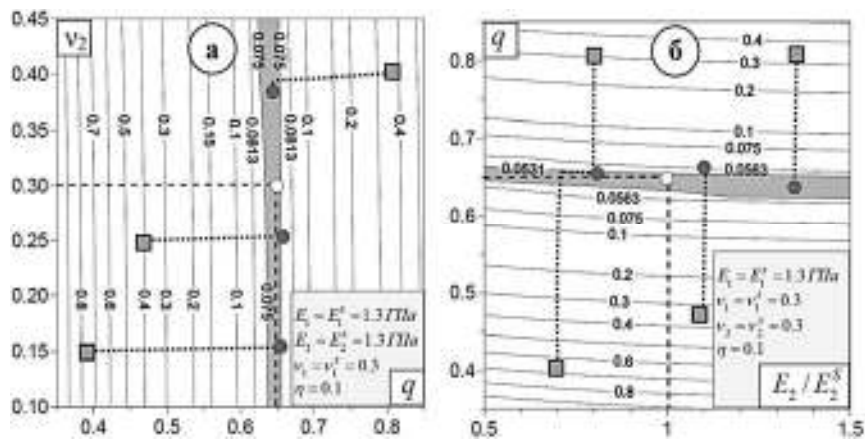


Рис. 5. Карты изолиний функции  $\Psi$  на плоскостях  $(q, v_2)$  и  $(E_2, q)$ .

Карты изолиний  $\Psi$  на плоскостях  $(E_1, E_2)$  и  $(v_1, v_2)$  представлены на рис. 6а и 6б соответственно. Для определения упругих характеристик целиков начальные приближения необходимо задавать практически любые из реалистичного диапазона, например такие, как на рис. 3.

Численные эксперименты для рассмотренной геометрии задачи, диапазона глубин  $H = 100\text{—}150$  м и малых модулях Юнга слагающих пород показали, что решение обратной задачи может быть найдено с точностью до 10%. При условии, что уровень помехи во входных данные не превышает 5%, а смещения на дневной поверхности регистрируются не менее чем в 150 точках.

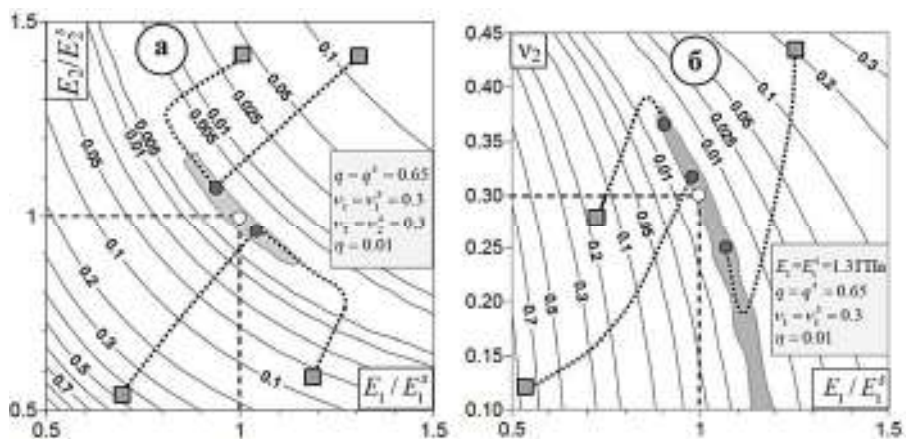


Рис. 6. Карты изолиний функции  $\Psi$  на плоскостях  $(E_1, E_2)$  и  $(v_1, v_2)$

### Заключение

Представлен способ количественной оценки горизонтальной компоненты природного поля напряжений и упругих свойств несущих элементов камерно-столбовой системы разработки месторождений на основе решения обратных задач. Для реализации данного способа необходимо регистрировать смещения дневной поверхности и относительные смещения контура выработанного пространства. Мониторинг смещений может осуществляться в процессе ведения горных работ методами спутниковой и подземной геодезии.


### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петухов И.М. Геодинамика недр / И.М. Петухов, И.М. Ватутина. — 2-е изд. — М.: Недра, 1999. — 256 с.
2. Турчанинов И.А. Основы механики горных пород / И.А. Турчанинов, М.А. Иофис, Э.В. Каспарьян. — Л.: Недра, 1989, 488 с.
3. Abass H., Neda J. Rock mechanics in wellbore construction, in: M.J. Economides, L.T. Watters, S. Dunn-Normann (eds), Petroleum well construction, Wiley. — Chichester, 1988. — P. 143—173.
4. Zang A., Stephansson O. Stress Field of Earth's Crust. // Springer. London, 2010. — p. 322.
5. Jaeger J.C., Cook N.G.W. Fundamentals of Rock Mechanics. — London, Methuen, 1969. — p. 513.

6. *Iglesias M.A.* Data inversion in coupled subsurface flow and geomechanics models // *Inverse Problems*. — Vol. 28. — № 11. — 115009 (2012).
7. *Vasco D.W., Ferretti A., Novali F.* Reservoir monitoring and characterization using satellite geodetic data: Interferometric Synthetic Aperture Radar observations from the Krechba field. — *Algeria, Geophysics*, 73, WA113-WA122 (2008).
8. *Wang R.* Poroelasticity: Efficient modeling of strongly coupled, slow deformation processes in multilayered half-space // *Geophysics*. — 2003. — Vol. 68. — № 2. — P. 705—717.
9. *Janna C., Castelletto N., Ferronato M., Gambolati G., Teatini P.* A geomechanical transversely isotropic model of the Po River basin using PSInSAR derived horizontal displacement // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*. — 2012. — № 51. — P. 105—118.
10. *Khakim M.Y.N., Tsuji T., Matsuoka T.* Geomechanical modeling for InSAR-derived surface deformation at steam-injection oil sand fields // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. — 2012. — Vol. 96—97. — P. 152—161.
11. *Krawczyk A., Perski Z., Hanssen R.* Application of ASAR interferometry for motorway deformation monitoring, In *ESA ENVISAT Symposium*, Montreux, Switzerland, 2007. — p. 4.
12. *Henry E., Mayer C., Rott H.* Mapping mining-induced subsidence from space in a hard rock mine: example of SAR interferometry application at Kiruna mine // *CIM Bulletin*. — 2004. — Vol. 97. — № 1083. — P. 1—5.
13. *Woo K.S., Eberhardt E., Rabus B., Stead D., Vyazmensky A.* Integration of field characterization, mine production and InSAR monitoring data to constrain and calibrate 3-D numerical modelling of block caving-induced subsidence // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 2012. — Vol. 53. — P. 166—178.
14. *Nazarov L.A., Nazarova L.A.* Method for Determination of Impending Earthquake Focal Parameters Based on Daylight Surface Displacement Data // *Doklady Earth Science*. — 2009. — V. 427A. — №. 6. — P. 1001—1005.
15. *Боликов В.Е.* Прогноз и обеспечение устойчивости капитальных горных выработок / В.Е. Боликов, С.А. Константинова. Екатеринбург: УрО РАН, 2003.
16. *Барях А.А.* Деформирование соляных пород / А.А. Барях, С.А. Константинова, В.А. Асанов. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996. — 204 с.
17. *Nazarova L.A.* Stress State of Sloping-Bedded Rock Mass Around a Working // *Soviet Mining Science*. — 1985. — № 21(2). — P. 132—136.
18. *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element Method in Engineering Science // McGraw Hill, London. — 1971. — p. 521.
19. *Dixon T.H.* An introduction to the Global Positioning System and some geological applications // *Reviews of Geophysics* — 1991. — Vol. 29. — № 2. — P. 249—276.

20. *Burgmann R., Rosen P.A., Fielding E.J.* Synthetic aperture radar interferometry to measure Earth's surface topography and its deformation // *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*. — 2000. — Vol. 28. — P. 169—209.

21. *Оценка длительной сохранности целиков при камерно-столбовой выемке рудных залежей / П.А. Назаров [и др.] // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. — 2006. — № 6. — С. 11—22.

22. *Atkinson K.A.* An Introduction to Numerical Analysis // John Wiley and Sons, New York. — 1988. — P. 712. 

#### **КОРОТКО ОБ АВТОРАХ**

---

*Панов Антон Владимирович* — инженер, anton-700@yandex.ru,  
*Назаров П.А.* — доктор физико-математических наук, naz@nisd.nsc.ru,  
Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, 630091, Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН Новосибирск, Красный проспект, 54.

